

Zbirka zadataka za Pripremnu nastavu iz matematike

Mart 2025, Sarajevo

Sadržaj

1	Kvadratna funkcija	2
1.1	Tutorijal	3
1.1.1	Kvadratna formula i faktORIZACIJA	3
1.1.2	Grafik, parametri i tjeme kvadratne funkcije	4
1.1.3	Diskriminanta	4
1.1.4	Vietove formule	5
1.1.5	Bikvadratne i simetrične jednačine, smjene, nejednačine i sistemi	5
1.2	Zadaci za samostalan rad	7
2	Nizovi i redovi	9
2.1	Tutorijal	10
2.2	Zadaci za samostalan rad	11

Lekcija 1

❖ Kvadratna funkcija

Kvadratne jednačine. Parametarske kvadratne jednačine. Vietove formule. Diskriminanta. Kvadratna funkcija i njen grafik. Kvadratne nejednačine. Parametarske kvadratne nejednačine.

Oblik kvadratne jednačine je $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, gdje su x_1 i x_2 rješenja jednačine, i $a, b, c \in \mathbb{R}$. Diskriminanta D se računa po formuli $D = b^2 - 4ac$ i određuje rješenja jednačine.

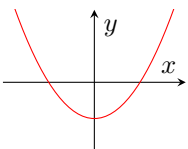
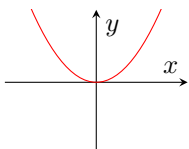
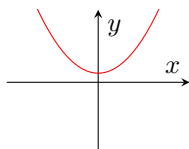
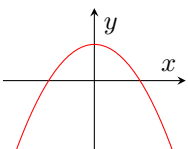
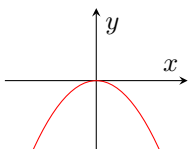
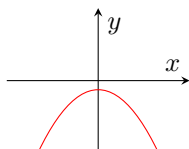
	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Tabela 1: Grafik funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ u zavisnosti od diskriminante i parametra a

Kvadratna formula: Rješenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ za $a \neq 0$ se mogu izračunati pomoću formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

gdje je D diskriminanta: $D = b^2 - 4ac$.

Vietove formule: Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine oblika $ax^2 + bx + c = 0$ za $a \neq 0$, tada važi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Tjeme kvadratne funkcije: Koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ kvadratne funkcije $ax^2 + bx + c = 0$ za $a \neq 0$ se računa po formuli

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right).$$

Tjeme predstavlja minimum za $a > 0$, a maksimum za $a < 0$.

1.1 Tutorijal

Napomena: svi zadaci u oblasti "Kvadratna funkcija" se rješavaju isključivo u skupu realnih brojeva, osim ako nije rečeno suprotno.

1.1.1 Kvadratna formula i faktORIZACIJA

1. Riješiti kvadratne jednačine:

(a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

(b) $2x^2 + x - 1 = -x$

(c) $x^2 + x + 1 = 0$

2. Riješiti kvadratne jednačine:

(a) $x^2 = 4$,

(f) $x^2 + 1 = 0$,

(b) $4x^2 - 9 = 0$,

(g) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$,

(c) $12345x^2 = 0$,

(h) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$,

(d) $9x^2 + 3x = 0$,

(i) $(x+3)(x+2) - (x-1)(x-6) = (x+1)(x+6) - 12$.

(e) $x^2 - 1 = 0$,

3. Izraziti rješenja jednačine gdje je x nepoznata:

(a) $ax(x-1) + bx(x+1) = 0$,

(b) $4ax^2b - a(x-2)^2b = 2xa(2b+xb)$,

(c) $(3\frac{x}{\pi} - 2ab\pi^{-1})(3x\pi^{-1} + \frac{2ab}{\pi}) = (4r^3 - 2ab)(4r^3 + 2ab), r \geq 0$,

(d) $(a+b+c+x)^2 - (x-a-b-c)^2 = x^2(a+b+c)$.

4. Riješiti jednačine:

(a) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+1} = 1$,

(c) $\frac{x^2+1}{4} + \frac{2x^2-3}{6} - \frac{x^2+3x-2}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{12}$,

(b) $-\frac{1}{4} = \frac{x^2-5x+1}{(x-7)(x-8)}$,

(d) $\frac{2x+1}{x^2-6x+8} + \frac{x-4}{x^2-10x+24} = \frac{-x-1}{x^2-8x+12}$.

5. Riješiti jednačine:

(a) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$,

(d) $x^2 - (3 + 2\sqrt{5})x + 7 + 3\sqrt{5} = 0$,

(b) $(x\sqrt{7} + \sqrt{5})(x - e) = 0$,

(e) $(97x + 13)^2 + 2 = 0$,

(c) $(x-3)^2 - 4 = 0$,

(f) $4x^2 - (4\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$.

6. Riješiti jednačinu $x^2 + 2mx - 3m^2 = 2m - 2x$ gdje je x nepoznata.

7. Faktorisati sljedeće trinome:

- (a) $x^2 + 13x + 36$, (c) $x^2 - 7x - 18$, (e) $x^2 - xy - 6y^2$,
(b) $x^2 - 7x + 10$, (d) $2x^2 - 7x + 6$, (f) $3p^2 - 2p - 5$.

8. Pojednostaviti sljedeće razlomke:

- (a) $\frac{3x^2 + 7x + 4}{x^2 + 3x + 2}$, (c) $\frac{3x^2 + 5x - 12}{12x^2 - 19x + 4}$, (e) $\frac{10x^2 - 23x + 12}{4x^2 + 4x - 15}$,
(b) $\frac{9x^2 - 1}{3x^2 - 13x + 4}$, (d) $\frac{4x^2 + x - 3}{4x^2 + 9x + 5}$, (f) $\frac{20p^2 + 21p + 4}{16p^2 - 1}$.

9. Formirati kvadratnu jednačinu čija su rješenja $x_1 = -\frac{3}{4}$ i $x_2 = \frac{2}{5}$.

1.1.2 Grafik, parametri i tjeme kvadratne funkcije

10. Nacrtati grafike funkcija:

- (a) $f(x) = x^2$, (d) $f(x) = x^2 - x$, (g) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$,
(b) $f(x) = 2x^2$, (e) $f(x) = x^2 - x - 2$, (h) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$,
(c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, (f) $f(x) = x^2 - x + 2$, (i) $x^2 + y^2 = 1$,

11. Odrediti kakve vrijednosti realnih parametara a , b i c kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ moraju biti da grafik funkcije bude simetričan u odnosu na y-osu.
12. Odrediti vrijednosti realnog parametra a takvu da funkcija $f(x) = (a^2 - 2)x^2 + x - 1$ prolazi kroz tačku $M(1, 2)$
13. Odrediti vrijednosti realnih parametara a , b i c funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ ako su poznate sljedeće činjenice: funkcija je simetrična u odnosu na y-osu, sadrži tačku $M(0, 2)$ i ima minimum. Također je poznato da ima dvije presječne tačke ili sa pravom $y = 3$ ili sa pravom $y = 1$, ali je nepoznato sa kojom, i da je udaljenost između tih presječnih tačaka jednaka 2.
14. Odrediti vrijednosti realnih parametara b i c za funkciju $f(x) = x^2 + bx + c$ za koje funkcija doseže svoju minimalnu vrijednost -2 za $x = 1$.
15. Odrediti vrijednosti realnih parametara p i q za funkciju $f(x) = p(x - 4)^2 + q$ za koje funkcija doseže svoju ekstremnu vrijednost u tački $M(4, -4)$, a udaljenost između dva rješenja jednačine iznosi 2.

1.1.3 Diskriminanta

16. Odrediti vrijednosti realnog parametra p za koju jednačina $x^2 + (2p + 1)x - p - \frac{3}{4} = 0$:
- (a) ima dva različita realna rješenja,
(b) ima dva jednaka realna rješenja (tj. jedno rješenje),
(c) nema realnih rješenja.

17. Odrediti vrijednosti parametra p jednačine $(p-2)x^2 + (2p+1)x + p-1 = 0$ za koje jednačina ima:
- (a) dva različita realna rješenja,
 - (b) jedno rješenje,
 - (c) kompleksna rješenja.

1.1.4 Vietove formule

18. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra k su rješenja kvadratne jednačine $x^2 + k(x+1) = 2x + 5$ suprotnog znaka.
19. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra p su rješenja kvadratne jednačine $x^2 + (m-4)x - m^2 + 4 = 0$ pozitivna.
20. Odrediti proizvod parametra $m \in \mathbb{R}$ za koji je ispunjen uslov da jednačina $(m+1)x^2 + (2m+5)x - 8m = 0$ ima jedan korijen $x = 2$ i drugog korijena date jednačine.
21. Odrediti vrijednost realnog parametra m u kvadratnoj jednačini $mx^2 - (3m-1)x + m = 0$ takvu da vrijedi $x_1 + x_2 = 5$.
22. Odrediti vrijednost realnog parametra m u kvadratnoj jednačini $x^2 - (m+1)x + m = 0$ takvu da je zbir kvadrata rješenja jednak 10.
23. Odrediti vrijednost realnog parametra k u kvadratnoj jednačini $(k+2)x^2 + kx - 5 = 0$ takvu da je zbir recipročnih vrijednosti rješenja jednak $\frac{1}{5}$.
24. Odrediti vrijednost realnog parametra c u kvadratnoj jednačini $x^2 + 2x + c = 0$ takvu da je zbir kubova rješenja jednačine jednak 10.
25. Odrediti za koje vrijednosti parametra m kvadratne jednačine $(2m+1)x^2 - 2(2m+1)x + m-1 = 0$ vrijedi $x_1 < x_2 < 2$.
26. Ako je poznato da je jedno rješenje $x_1 = 0$ jednačine $abx^2 + b^2x + b - 3 = 0$, odrediti parametre a i b takve da je drugo rješenje $x_2 = -3$.
27. Odrediti vrijednost realnog parametra m za jednačinu $x^2 + (m+1)x + 4m + 1 = 0$ takvu da je zbir kvadrata rješenja jednačine minimalan.
28. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $x^2 - ax + 1 = 0$, napisati jednačinu čijoj su rješenja jednaka $y_1 = 5x_1 + x_2$ i $y_2 = x_1 + 5x_2$.
29. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $3x^2 + 3x - 2024 = 0$, izračunati vrijednost izraza $4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1$.
30. Odrediti skup svih vrijednosti realnog parametra k za koje rješenja x_1 i x_2 jednačine $x^2 - (k-5)x + k - 6 = 0$ zadovoljavaju relacije $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$ i $x_1^2 + x_2^2 \geq 2$.

1.1.5 Bikvadratne i simetrične jednačine, smjene, nejednačine i sistemi

31. Odrediti presječne tačke funkcija:

(a) $y = x^2 + 3x - 4$ i $y = x + 4$

(b) $y = -x^2 + 3x - 4$ i $y = x^2 + 3x - 6$

32. Svesti slijedeće jednačine na kvadratne i riješiti ih:

(a) $x^4 + 6x^2 = -5$,

(f) $x^6 - 35x^3 + 216 = 0$

(b) $(x + \frac{1}{x} - 3)(x + \frac{1}{x} - 4) = 12$,

(g) $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$,

(c) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 3$,

(h) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$,

(d) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$,

(i) $12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$,

(e) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$,

(j) $|x|^2 + 2|x| + 5 = (|x|^2 + 2|x| + 1)(2 + 2|x| + |x|^2)$.

33. Odrediti realna i kompleksna rješenja jednačina:

(a) $8x^3 - 27 = 0$,

(b) $x^3 + 8 = 0$.

34. Odrediti skup rješenja nejednačina:

(a) $x^2 \leq 0$,

(d) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$,

(g) $\frac{x^2 - 7x - 18}{-x^2 + 2x - 1} > 0$,

(b) $x^2 + 2x + 1 > 0$,

(e) $x^2 \geq 4$,

(h) $\frac{x^2 + 5x + 1}{2x^2 + 10x + 2} \leq 0$,

(c) $x^2 + 1 \leq 0$,

(f) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x - 5} < 0$,

(i) $\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 6x + 9} \geq 0$,

35. Odrediti vrijednosti realnog parametra k za koju je funkcija $f(x) = kx^2 + (3k - 1)x + k - 2$ pozitivna za svako x .

36. Riješiti sistem jednačina

$$x^2 - y^2 = 0,$$

$$y + x^2 = 6.$$

37. Odrediti vrijednosti realnog parametra q takvu da sistem

$$y = qx^2,$$

$$x^2 + (y - q)^2 = 1.$$

ima 3 rješenja.

38. Odrediti proizvod svih parametara a za koje sistem

$$x^2 + y^2 + 2x \leq 1,$$

$$x - y + a = 0.$$

ima jedinstveno rješenje.

39. Odrediti tačku koja se nalazi na svakoj paraboli $y = x^2 + (a + 4)(x - 1) + 4$, $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Zadaci za samostalan rad

1. Ako se broj x izmnoži sa brojem koji je za jedan veći i sa brojem koji je za jedan manji, dobije se taj isti broj. Odrediti broj x .
2. Odrediti vrijednosti realnog parametra a takvu da funkcija $f(x) = (1-a)x^2 + x - 1$ prolazi istovremeno kroz tačke $M(2, 1)$ i $N(-1, -2)$.
3. Odrediti vrijednosti realnih parametara a i b za funkciju $f(x) = ax^2 + bx + 1$ za koje funkcija ima maksimum u tački $M(-1, 2)$.
4. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra k jednačina $(\frac{3}{4}k - 1)x^2 - 2(k - 2) + k - 4 = 0$:
 - (a) ima dva različita realna rješenja,
 - (b) ima dva jednaka realna rješenja (tj. jedno rješenje),
 - (c) ima konjugovano kompleksna rješenja.
5. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra k jednačina $f(x) = x^2 + 3kx + k + \frac{5}{4}$ nema realnih rješenja.
6. Odrediti za koje vrijednost realnog parametra α su rješenja jednačine $(2\alpha - 3)x^2 + (3\alpha - 1)x + \alpha - 2 = 0$ ima konjugovano kompleksna rješenja.
7. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m su rješenja jednačine $(x - m)^2 - 4(x - m) + 3 = 0$ suprotnog znaka.
8. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m su rješenja kvadratne jednačine $x(x + 1) = \frac{2}{m} - 1$ negativna.
9. Odrediti najmanju vrijednost cjelobrojnog parametra a za koju su rješenja kvadratne jednačine $(a - 1)x^2 - ax + 1 = 0$ različita i pozitivna.
10. Odrediti vrijednost realnog parametra m u jednačini $x^2 - 5x + m = 0$ takvu da je zbir kvadrata recipročnih vrijednosti rješenja jednak $\frac{13}{36}$.
11. Odrediti koeficijente p i q kvadratne jednačine $x^2 + px + q = 0$ tako da njena rješenja budu $x_1 = p$ i $x_2 = q$.
12. Koristeći isključivo Vietove formule, za jednačinu $3x^2 - x + 2 = 0$ izračunati $x_1^3 + x_2^3$.
13. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra p rješenja kvadratne jednačine $x^2 - (p - 2)x + p + 1 = 0$ zadovoljavaju uslov $\left| \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right| < 2$.
14. Odrediti za koju vrijednost realnog parametra m će apsolutna razlika kvadrata rješenja jednačine $8x^2 - mx + 3 = 0$ biti jednaka $\frac{5}{16}$.
15. Odrediti za koliko vrijednosti realnog parametra a kvadratna jednačina $x^2 + ax + 123 = 0$ ima dva različita cjelobrojna rješenja.
16. Odrediti zbir rješenja jednačine $\sqrt[3]{4 - \sqrt{5}x^2} + \sqrt[3]{32 - 8\sqrt{5}x} + 2 = 0$.

17. Odrediti vrijednost realnog parametra m za jednačinu $x^2 - (m^3 + 4m^2 + 3m)x + m = 0$ takvu da je zbir recipročnih vrijednosti jednačine minimalan.
18. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $a^6x^2 - a^2x + \frac{1}{a} = 0$, napisati jednačinu čijoj su rješenja $y_1 = \frac{1}{x_1}$ i $y_2 = \frac{1}{x_2}$.
19. Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2 + x + 1 = 0$, izračunati $x_1^4 + x_2^4$.
20. Odrediti zbir svih vrijednosti realnog parametra a za koje grafici funkcija $y = (a + 2)x^2 - ax - 3$ i $y = ax - 4$ imaju tačno jednu zajedničku tačku.
21. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}x + xy + y &= 11, \\x^2y + xy^2 &= 30.\end{aligned}$$

22. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}3x^2 - 4xy + 7x &= 0, \\x^2 + y^2 &= 25.\end{aligned}$$

23. Odrediti tačke koje se nalaze na svakoj paraboli $ay = x^2 + (a + 4)(x - 1) + 4$, $a \in \mathbb{R}$.
24. U zavisnosti od realnog parametra b , odrediti najveću vrijednost minimuma parabole $f(x) = x^2 + (b - 2)x + b$.

Lekcija 2

❖ Nizovi i redovi

Pojam niza. Aritmetički i geometrijski niz. Rekurzivni nizovi. Redovi. Sigma i pi notacija.

Kroz vrijeme, pokazalo se da se u stvarnosti, uz funkcije realnih brojeva, često koriste i funkcije prirodnih brojeva. Takve funkcije su dobile poseban naziv - *nizovi*. Formalno, realnu funkciju

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}$$

koja svakom elementu skupa prirodnih brojeva pridružuje tačno jedan element skupa $X \subseteq \mathbb{R}$ nazivamo beskonačni niz ili kraće niz i obilježavamo sa $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sa a_n označavamo *opći član niza* i on je funkcija promjenjive n . Uvrštavanjem neke vrijednosti n dobijamo n -ti član niza.

Aritmetički niz: Niz čiji su svi susjedni članovi međusobno udaljeni za konstantnu vrijednost d se naziva aritmetički niz. Formalno, niz je aritmetički ako vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = d, d \in \mathbb{R}.$$

Opći član i parcijalna suma aritmetičkog niza se mogu izraziti preko formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Također vrijedi da svaki član, osim prvog, se može izraziti kao aritmetička sredina dva susjedna. Preciznije, vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n > 1.$$

Geometrijski niz: Niz takav da je količnik svaka dva susjedna člana konstantan i ima vrijednost q se naziva geometrijski niz. Formalno, niz je geometrijski ako vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q \in \mathbb{R}.$$

Opći član i parcijalna suma geometrijskog niza se mogu izraziti preko formula:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ za } q > 1, \quad S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ za } q < 1.$$

Također vrijedi da svaki član, osim prvog, se može izraziti kao geometrijska sredina dva susjedna. Preciznije, vrijedi

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \forall n > 1.$$

Geometrijski niz konvergira za $|q| < 1$, je konstantan za $q = 1$, i divergira za $|q| > 1$. Ako geometrijski niz konvergira, onda se njegova beskonačna suma može izračunati po formuli:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{1}{1 - q}.$$

2.1 Tutorijal

1. Odrediti opći član niza običnom i (ako je moguće) rekursivnom formulom:

(a) $5, 10, 15, 20, \dots$, (b) $2, 4, 8, 16, \dots$, (c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, (d) $1, -1, 1, -1, \dots$

2. Raspisati prvih 5 članova i stoti član nizova:

(a) $a_n = 2n - 1$, (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, (c) $a_n = n^2 - 1$, (d) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$.

3. Pronaći peti član nizova:

(a) $a_n = 3(a_{n-1} + 2), a_1 = -2$, (b) $a_{n+1} = -a_n + 1, a_1 = 1$.

4. Raspisati prvih 10 članova rekursivnog niza $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = 0, F_2 = 1$.

5. Odrediti izraz za parcijalnu sumu nizova:

(a) $a_n = \frac{1}{2^n}$, (b) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

6. Zapisati parcijalne sume pomoću sigma notacije:

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$, (c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{6561}$,
 (b) $\sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \dots + \sqrt{77}$, (d) $\frac{4}{3 \ln 2} - \frac{5}{4 \ln 3} + \frac{6}{5 \ln 4} - \dots$

7. Parcijalne sume iz prethodnog zadatka prepraviti tako da brojač sume počinje od jedinice.

8. Izračunati sume:

(a) $\sum_{k=1}^5 k^3$, (c) $\sum_{i=1}^7 (-1)^i$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, (d) $\sum_{i=1}^{10} 2$,

9. Izračunati sumu $\sum_{k=1}^{999999} \log \left(\frac{k}{k+1} \right)$.

10. Dato je prvih nekoliko članova nizova. Ako je niz aritmetički, pronaći d :

(a) $11, 17, 23, 29, \dots$, (d) $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, \dots$,
 (b) $-31, -19, -7, 5, \dots$, (e) $\ln 2, \ln 4, \ln 8, \ln 16, \dots$,
 (c) $16, 9, 2, -4, \dots$, (f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

11. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je aritmetički. Odrediti a_{10} ako su $a_6 = 16$ i $a_8 = 22$.

12. Odrediti x tako da elementi redom $2 + x, 3 - x, 8 + x$ obrazuju aritmetički niz.

13. Odrediti n i S_n u aritmetičkom nizu ako je $a_1 = 4$, $d = 5$, $a_n = 49$.
14. Koliko članova niza 10, 15, 20, 25... treba sabrati da bi se dobio zbir 2475?
15. Neki članovi aritmetičkih progresija 17, 21, 25, 29, ... i 16, 21, 26, ... jednaki su među sobom. Odrediti zbir prvih 50 jednakih članova datih progresija.
16. U aritmetičkoj progresiji poznati su članovi $a_{54} = \alpha$ i $a_{70} = \beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$). Odrediti zbir prvih 160 članova te progresije.
17. Dato je prvih nekoliko članova nizova. Ako su geometrijski, odrediti q . Zatim, izračunati zbir prvih 10, kao i zbir beskonačno mnogo članova opadajućih geometrijskih nizova.
- (a) 2, 6, 18, 54, ..., (c) 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, ..., (e) 2, 4, 8, 16, 31, ...,
 (b) 0.3, -0.09, 0.027, -0.0081, (d) 144, -12, 1, $-\frac{1}{12}$, ..., (f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{4}$, ...
18. Odrediti x tako da brojevi redom $x + 5$, $25 - x$ i $30 + 2x$ obrazuju geometrijski niz.
19. Ako je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrijski niz, odrediti a_{10} ako je $a_3 = 8$ i $a_5 = 32$.
20. Tri broja čiji je zbir 26 obrazuju geometrijski niz. Ako se tim brojevima redom doda 1, 6 i 3, dobiju se brojevi koji obrazuju aritmetički niz. Odrediti niz.
21. Suma beskonačne opadajuće geometrijske progresije sa pozitivnim članovima iznosi $\frac{9}{2}$. Ako je suma kvadratnih korijena članova progresije jednaka 3, odrediti količnik progresije.
22. Neka je $s = 1 + q + q^2 + \dots (|q| < 1)$ i $S = 1 + Q + Q^2 + \dots (|Q| < 1)$, gdje su s i S dati brojevi. Odrediti zbir $1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + \dots$.
23. Zbir članova beskonačne geometrijske progresije je 3, a zbir kubova njenih članova je $\frac{108}{13}$. Odrediti zbir kvadrata njenih članova.
24. Prva dva člana rastuće geometrijske progresije su rješenja jednačine $\frac{2^{2 \sin x}}{1 + 2^{2 \sin x}} = 1 - \frac{3 - 2^{2 \sin x}}{5 - 2^{2 \sin x}}$ na intervalu $(0, \pi)$. Ako je zbir ove progresije 651π , odrediti ukupan broj njenih članova.

2.2 Zadaci za samostalan rad

- Zapisati parcijalnu sumu $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + \dots$ preko sigma notacije.
- Pokazati da vrijedi $\ln \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k)$.
- Četrnaesti član aritmetičkog niza je $\frac{2}{3}$, a deveti član je $\frac{1}{4}$. Odrediti prvi i n -ti član.
- Prvi član aritmetičkog niza je 20, a razlika susjednih članova je 18. Koji član niza je jednak 614?
- Proizvod prvog i zadnjeg člana aritmetičkog niza od 7 članova iznosi -32. Razlika dvostrukog trećeg i trostrukog petog člana iznosi -22. Odrediti a_n .

6. Izračunati sumu $2 + 5 + 8 + \dots + 101$.
7. Odrediti zbir prvih 2012 članova aritmetičke progresije $\frac{2011}{2012}, \frac{2010}{2012}, \frac{2009}{2012}, \dots$
8. Napisati izraz za zbir članova aritmetičkog niza od m -tog do n -tog člana, uključivo, pri čemu je $m < n$.
9. Koliko jednakih članova imaju aritmetičke progresije $2, 7, 12, 17, \dots$ i $2, 5, 8, 11, \dots$ ako svaka od njih ima 121 član?
10. Ako je zbir prva tri člana aritmetičke progresije 42, a zbir prvih šest članova 48, odrediti zbir prvih deset članova.
11. Data je aritmetička progresija $a_1, a_2, \dots$ čija je razlika $d = 1$, a zbir prvih 98 članova $a_1 + a_2 + \dots + a_{98} = 137$. Odrediti zbir $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98}$.
12. Tri broja čiji je zbir 21 čine aritmetički niz. Ako drugom broju oduzmemo 1, i trećem dodamo 1, dobije se geometrijski niz.
13. Tri broja od kojih je treći 12 su uzastopni članovi geometrijskog niza. Ako se broj 12 u nizu zamijeni sa 9, dobije se aritmetički niz. Odrediti niz.
14. U geometrijskom nizu vrijedi $a_6 - a_4 = 216$, $a_3 - a_1 = 8$, $S_n = 40$. Odrediti a_1 , q i n .
15. Četiri broja čine aritmetički niz. Ako se od njih oduzmu redom brojevi 2, 7, 9 i 5, dobije se geometrijski niz. Odrediti niz.
16. Ako se 4 broja koja su uzastopni elementi geometrijskog niza uvećaju respektivno za 5, 6, 9 i 15 dobiju se 4 broja aritmetičkog niza. Odrediti niz.
17. Četiri broja čine geometrijski niz. Ako se drugom broju doda 1 a četvrtom oduzme 5, brojevi onda predstavljaju geometrijski niz. Odrediti niz.
18. Zbir prva tri člana geometrijskog niza je 21. Zbir njihovih kvadrata je 189. Odrediti niz.
19. U geometrijskoj progresiji je $a_1 + a_5 = 51$, $a_2 + a_6 = 102$. Odrediti za koju vrijednost n je zbir n prvih članova te progresije $S_n = 3069$.
20. Zbir prva tri člana rastućeg geometrijskog niza je 91. Ako tim članovima redom dodamo 25, 27 i 1 dobijamo tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Odrediti sedmi član datog geometrijskog niza.
21. Zbir prva tri člana rastuće aritmetičke progresije je 54. Ako od prvog člana te progresije oduzmemo 3, drugi član ostane nepromijenjen, a trećem članu dodamo 12, dobija prva tri člana geometrijske progresije. Odrediti količnik te geometrijske progresije.
22. U geometrijskoj progresiji količnik je 2, a zbir prvih sedam članova je jednak 635. Odrediti sedmi član.
23. Pokazati da je $0.\bar{9} = 1$ koristeći pojam geometrijskog niza.
24. Pojednostaviti sume i proizvode:

$$(a) \sum_{k=2}^n \frac{2}{3^{k-1}},$$

$$(b) \sum_{k=-1}^n \frac{1}{2^k},$$

$$(c) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$(d) \prod_{i=1}^n (i + 2).$$